
UC-NRLF
$B 24 472



Beiträge zur Theorie
er astigmatischen Abbildung von Objekten in hyperbolischen Spiegeln.

Mit Anwendung auf die Abbildung des Sternhimmels.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

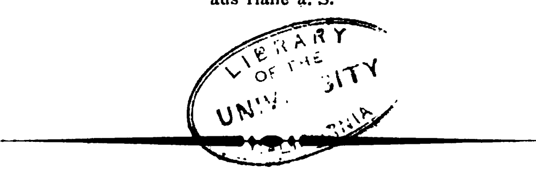
der

hohen philosophischen Fakultät der Universität Rostock

vorgelegt von

Max Eichler

aus Halle a. S.



ROSTOCK.

Carl Boldt'sche Hof-Buchdruckerei.

1903.

Referent: Herr Professor Dr. **Matthiessen.**

SEINEN LIEBEN ELTERN

IN LIEBE UND DANKBARKEIT GEWIDMET.



Einleitung.

Unter Aplanatismus oder Stigmasie versteht man die Eigenschaft von Lichtstrahlen, sich, alle von einem Punkte ausgehend, nach Spiegelung oder Brechung in einer beliebig gekrümmten Fläche wieder in einem Punkte zu vereinigen. Es bedeutet, dass diese Strahlen, welche homocentrische genannt werden, auch nach der Reflexion oder Refraktion ein deutliches, scharfes also punktuelles Bild entstehen lassen.

Entstehen z. B. bei einer Spiegelung jedoch statt eines Bildes zwei und sind diese verzerrt, so nennt man die Reflexion eine astigmatische und den Vorgang Astigmatismus.

In den umfangreicheren Lehrbüchern[1] der mathematischen Physik wird in dem Teile der Optik, welcher sich mit der Spiegelung an krummen Oberflächen beschäftigt, zumeist auch der Fall der schiefen Incidenz eingehend behandelt.

---

[1] Müller-Pouillet, Lehrbuch der Physik, Neunte Auflage. Braunschweig 1897. § 183—185 und 193, 194.

R. S. Heuth, A treatise on geometrical Optics. Cambridge 1887.

Lässt man ein schmales homocentrisches Strahlenbündel schief auf eine krumme spiegelnde Fläche fallen, so bleiben die Strahlen im allgemeinen nicht homocentrisch, sondern nehmen nach Reusch die sogenannte tetraedrische oder prismatoidische Modifikation an. Hierunter versteht man, dass die Strahlen in der Nähe des Bildes sich nicht wieder genau in einem Punkte vereinigen, sondern in einem Raume liegen, welcher durch zwei sich kreuzende Einschnürungen begrenzt wird. Eine ähnliche Gestaltung weist im regulären System der Krystallographie die hemiëdrische Form des Oktaeders — das Tetraeder — auf.

Da diese Einschnürungen sich durch grössere Helligkeit auszeichnen, so werden sie analog den Brennpunkten Brennlinien genannt. Der tetraedrische Raum führt die Bezeichnung Brennraum. Legt man durch den Hauptstrahl, d. i. derjenige, welcher durch die Mitten der Brennlinien geht, und je eine Brennlinie Ebenen, so stehen diese beiden Ebenen nach Kummer senkrecht aufeinander. Diesen Ebenen hat man die Bezeichnung Fokalebenen gegeben.

Sturm's[1] 1845 erschienene Abhandlung „Mémoire sur l'optique" enthält die erste mathematische Untersuchung der Theorie des Astigmatismus, in welcher er darauf hinwies, dass bei schiefer Incidenz ein unendlich dünner Lichtstrahl durch eine Kugeloberfläche im allgemeinen nicht ein punktuelles Bild, sondern zwei

---

[1] Sturm, Mémoire sur l'optique, Compt. rend. XX und Poggend. Ann. 65 p. 116 u. 374 (1845).

in Linien — Brennlinien — verzerrte astigmatische Bilder ergibt. Für die Entfernungen und Lagen der beiden Brennlinien stellte er zugleich Gleichungen auf, in welchen er die Objekt- und Bildabscissen auf rechtwinklige Koordinaten bezog.

Zu Anfang des 18. Jahrhunderts hatte der Mechaniker Leupold laut einer kleinen von ihm verfassten Schrift schon Apparate konstruiert[1], mit welchen er Anamorphosen, d. h. Zerrbilder, herstellte, welche, in einem entsprechenden kegelförmigen oder cylindrischen Spiegel betrachtet, richtige, wohlproportionierte Bilder ergaben. Diese Apparate und Bilder sind jedoch kaum aus Interesse für die Wissenschaft, sondern aus dem Drange, Kuriositäten herzustellen, entstanden.

Eine Abhandlung von Reusch[2], welche im Jahre 1867 erschien, wies gegenüber der Sturm'schen durch verschiedene Vereinfachungen sehr bemerkenswerte Vorteile und Fortschritte auf. Reusch mass die Abscissen konjugierter Punkte auf den Lichtstrahlen selbst ab und wählte als den Koordinatenanfangspunkt den Lichteinfallspunkt. Ausserdem gab er durch Einführung von Fixpunkten geometrische Konstruktionen der Bildpunkte bezüglich -Kurven an.

---

[1] Bode, Zur Theorie des Astigmatismus katoptrischer Anamorphosen. Inaug.-Diss. Rostock (1897).

[2] Reusch, Reflexion und Brechung des Lichtes in sphärischen Flächen. Poggend. Ann. 1867, p. 497.

Die entscheidendste Förderung erhielt die Wissenschaft des Astigmatismus durch die Arbeiten von L. Matthiessen[1] und C. Neumann[2].

An weiteren Untersuchungen sind diejenigen von Detels[3], Gartenschläger[4] und Grix[5] zu nennen.

In nachfolgender Arbeit soll ein Beitrag zur Theorie der astigmatischen Spiegelung in Oberflächen zweiter Ordnung, speziell der Astigmatismus katoptrischer Anamorphosen in hyperbolischen Spiegeln geliefert werden, wobei unter anderem das Bild des Sternhimmels von fixierten Augenpunkten aus Berücksichtigung finden soll.

---

[1] Matthiessen, Über die Form der unendlich dünnen astigmatischen Strahlenbündel und die Kummer'schen Modelle. Münch. Ber. (1883).

Über den Astigmatismus von Strahlenbündeln bei schiefer Incidenz auf krummen Oberflächen. Berlin-Eversbusch' Ztsch. f. vergl. Augenheilk. II § 39 (1889).

[2] C. Neumann, Brechung sehr dünner Strahlenbündel. Ber. d. Sächs. Gesell. d. Wissenschaften Phys.-Math. Klasse 1880 p. 53.

[3] Detels, Über homocentrische Brechung unendlich dünner cylindrischer Strahlenbündel in Rotationsflächen zweiter Ordnung. Inaug.-Diss. Rostock 1887.

[4] Gartenschläger, Über die Abbildung eines astigmatischen Objekts durch eine Linse für parallelen Durchgang der Lichtstrahlen. Inaug.-Diss. Rostock 1888.

[5] Grix, Dioptrische Abbildung der Erdkugel infolge der astronomischen. Refraktion. Inaug.-Diss. Rostock 1901.

Der von Matthiessen[1] in einer neueren Abhandlung besprochene Aplanatismus bei Brechung und Spiegelung in Oberflächen zweiter Ordnung ist als Spezialfall in vorliegende Untersuchungen einbezogen worden.

---

[1] Matthiessen, Über aplanatische Brechung und Spiegelung in Oberflächen zweiter Ordnung. Arch. ges. Physiol. Bd. 91 (1902).

Erster Teil.

---

§ I. Mathematische Ableitung der Gleichungen der Bildkurven.

Sieht man bei einer Spiegelung von Lichtstrahlen durch die gekrümmte Oberfläche von Rotationskörpern von den Gauss'schen Prämissen ab, so lassen sich die durch solche Spiegelung entstehenden Bilder und die Lage derselben nicht mehr durch einfache geometrische Konstruktionen festlegen, sondern man ist genötigt, zur Bestimmung derselben eingehende mathematische Betrachtungen zu Hilfe zu nehmen.

Die Lösung unserer Aufgabe stützt sich in ihrem mathematischen Teile auf die oben citierte Arbeit von C. Neumann.

Ebenso, wie bei dem Aplanatismus, so auch bei dem Astigmatismus liegt der einfallende und der reflektierte Strahl eines unendlich dünnen Strahlenbündels in einer Ebene, der sogenannten Einfallsebene. Diese Ebene ist durch den Axenstrahl und das Einfallslot bestimmt. Legt man nun in dem Einfallspunkte des Lichtstrahles eine Tangentialebene an die spiegelnde Fläche und lässt unendlich dicht neben dieser

durch eine parallele Ebene die Oberfläche des Spiegels schneiden, so wird von dieser krummen Fläche eine kleine Kalotte abgetrennt. Die Basis des abgeschnittenen Körpers ist ein Dupin'scher Kegelschnitt, während der Scheitel mit dem Lichteinfallspunkte identisch ist.

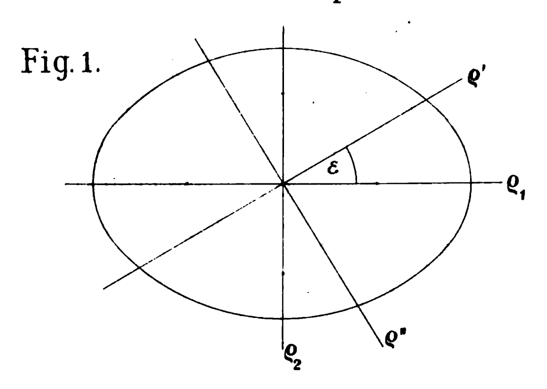


Fig. 1.

Bezeichnet man in vorstehender Figur 1, welche den Grundriss der abgeschnittenen Kuppe darstellt, den Punkt P als den Einfallspunkt und mit

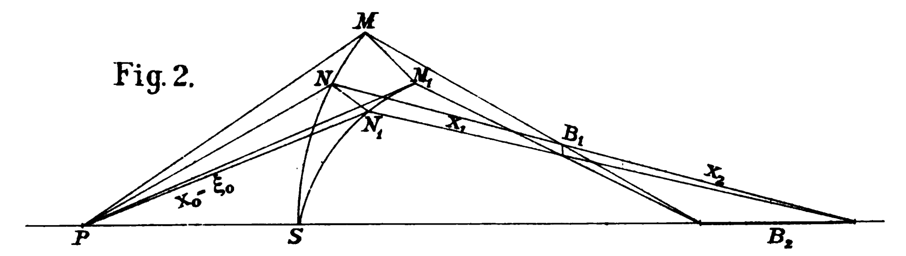
ϱ_1 den Krümmungsradius des Hauptnormalschnittes,
ϱ_2 „ „ „ „ Nebennormalschnittes,
ϱ' „ „ „ in der Einfallsebene mit dem Azimut ε,
ϱ'' „ „ „ in der auf der Letzteren senkrechten Ebene,

so finden folgende Relationen statt:

$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{\cos^2 \varepsilon}{\varrho_1} + \frac{\sin^2 \varepsilon}{\varrho_2} \text{ und } \frac{1}{\varrho''} = \frac{\sin^2 \varepsilon}{\varrho_1} + \frac{\cos_2 \varepsilon}{\varrho_2}.$$

Die in der schon oben erwähnten Neumann'schen Arbeit aufgestellten Gleichungen, welche in ihrer

klaren und umfassenden Form grosse Bedeutung für die Behandlung astigmatischer Probleme haben, sind, um sowohl in der Katoptrik als auch Dioptrik angewendet werden zu können, für die astigmatische Strahlenbrechung aufgestellt. Für die Spiegelung lassen sich dieselben leicht umwandeln, indem der Brechungsindex n, gleich -1 gesetzt wird. Ebenso wie Reusch, so hat auch C. Neumann den Punkt, in welchem der Lichtstrahl die Spiegelfläche trifft — den Einfallspunkt —, als Anfangspunkt der Abscissen angenommen. Bezeichnen wir in Figur 2 nach Reusch



die von P ausgehenden Lichtstrahlen mit x_0 und ξ_0, und nehmen wir, um zu der Normalform der Neumannschen Gleichungen zu kommen, das einfallende Strahlenbündel auch schon als astigmatisch an, so sind A_1 und A_2 die beiden Brennlinien desselben und ϑ die Bezeichnung für das Azimut der Fokalebene ΣA_1. Bei dem gebrochenen Strahlenbündel sind die Benennungen analog denen des einfallenden, und zwar bedeuten x_1 und x_2 die Bildabscissen, B_1 und B_2 die beiden Brennlinien und ϑ_2 das Azimut der Fokalebene ΣB_1. Der Einfallswinkel bezüglich Brechungswinkel heissen e_2 und e_1.

Von den aufgeführten Bezeichnungen sind die Grössen x_1, x_2 und ϑ_2 unbekannt. Für die Bestimmung derselben hat C. Neumann folgende Relationen aufgestellt:

$$\text{Ia.}\quad \frac{\varrho_1\,\varrho_2\sin e_1}{(\varrho_2\cos\varepsilon^2+\varrho_1\sin\varepsilon^2)\sin(e_2-e_1)}\left\{-\cos^2 e_2\cdot\left(\frac{\cos\vartheta_1{}^2}{x_0}+\frac{\sin\vartheta_1{}^2}{\xi_0}\right)+\frac{\sin e_2}{\sin e_1}\cdot\cos^2 e_1\left(\frac{\cos\vartheta_2{}^2}{x_2}+\frac{\sin\vartheta^2{}_2}{x_1}\right)\right\}=1.$$

$$\text{IIa.}\quad \frac{\varrho_1\,\varrho_2\sin e_1}{(\varrho_2\sin\varepsilon^2+\varrho_1\cos\varepsilon^2)\sin(e_2-e_1)}\left\{-\left(\frac{\sin\vartheta_1{}^2}{x_0}+\frac{\cos\vartheta_1{}^2}{\xi_0}\right)+\frac{\sin e_2}{\sin e_1}\left(\frac{\sin\vartheta_2{}^2}{x_2}+\frac{\cos\vartheta_2{}^2}{x_1}\right)\right\}=1.$$

$$\text{IIIa.}\quad \frac{\varrho_1\,\varrho_2\sin e_1}{(\varrho_1-\varrho_2)\sin(e_2-e_1)}\left\{-\frac{\cos e_2\sin 2\,\vartheta_1}{\sin 2\,\varepsilon}\left(\frac{1}{x_0}-\frac{1}{\xi_0}\right)+\frac{\sin e_2\cdot\cos e_1\cdot\sin 2\,\vartheta_2}{\sin e_1\cdot\sin 2\,\varepsilon}\left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}\right)\right\}=1.$$

Bezüglich der Vorzeichen der Richtung ist zu bemerken, dass die Krümmungsradien positiv zu setzen sind, wenn die Fläche gegen die Richtung der auffallenden Strahlen konvex ist, sonst negativ; ferner dass, wenn die Abscissen auf dem Strahle vor der Fläche liegen, dieselben negativ, im andern Falle positiv sind.

Nimmt man statt des allgemeinsten Falles, dass schon das einfallende Lichtbündel astigmatisch sei,

die einfallenden Strahlen homocentrisch an, wie es auch Figur 2 veranschaulicht, so vereinigen sich die beiden Brennlinien a_1 und a_2 zu einem Brennpunkte und ξ_0 geht in x_0 über. Hierdurch vereinfachen sich die Formeln Ia — IIIa in folgender Weise:

$$\text{Ib.} \quad \frac{\varrho_1 \varrho_2 \sin e_1}{(\varrho_2 \cos \varepsilon^2 \times \varrho_1 \sin \varepsilon^2) \sin (e_2 - e_1)} \left\{ - \frac{\cos^2 e_2}{x_0} + \right.$$

$$\left. \times \frac{\sin e_2}{\sin e_1} \cdot \cos^2 e_1 \cdot \left(\frac{\cos \vartheta_2{}^2}{x_2} \times \frac{\sin \vartheta_2{}^2}{x_1} \right) \right\} = 1.$$

$$\text{IIb.} \quad \frac{\varrho_1 \varrho_2 \sin e_1}{(\varrho_2 \cos \varepsilon^2 \times \varrho_1 \sin \varepsilon^2) \sin (e_2 - e_1)} \left\{ - \frac{1}{x_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin e_2}{\sin e_1} \left(\frac{\sin \vartheta_2{}^2}{x_2} + \frac{\cos \vartheta_2{}^2}{x_1} \right) \right\} = 1.$$

$$\text{IIIb.} \quad \frac{\varrho_1 \varrho_2 \sin e_1}{(\varrho_1 - \varrho_2) \sin (e_2 - e_1)} \cdot \frac{\sin e_2 \cdot \cos e_1 \sin 2 \vartheta_2}{\sin e_1 \cdot \sin 2 \varepsilon} \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) = 1.$$

Wird weiterhin das Azimut ε (siehe Figur 1) gleich Null gesetzt, d. h. die Einfallsebene fällt mit dem Hauptnormalschnitt zusammen, so erhält man statt der bisherigen drei Gleichungen nur zwei, da die dritte, wenn sie mit $\sin 2\varepsilon = 0$ multipliziert wird, identisch verschwindet. Ausserdem folgt, dass ϑ_2 gleich 90^0 wird, wodurch die Lage der Brennlinie b_1 als senkrecht zur Einfallsebene stehend bestimmt ist.

Die Gleichungen Ib und IIb nehmen infolge vorstehender Betrachtung folgende Gestalt an:

$$\text{Ic.}\quad \frac{\varrho_1 \sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)}\left\{-\frac{\cos e_2}{x_0} + \frac{\sin e_2}{\sin e_1}\cdot \cos^2 e_1 \left(\frac{\cos \vartheta_2{}^2}{x_2} + \frac{\sin \vartheta_2{}^2}{x_1}\right)\right\} = 1.$$

$$\text{IIc.}\quad \frac{\varrho_2 \sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)}\left\{-\frac{1}{x_0} + \frac{\sin e_2}{\sin e_1}\left(\frac{\sin \vartheta_2{}^2}{x_2} + \frac{\cos \vartheta_2{}^2}{x_1}\right)\right\} = 1.$$

Um den inneren Zusammenhang der von Reusch aufgestellten Relationen mit denjenigen von C. Neumann zu zeigen, setze man in den Gleichungen Ic und IIc $\varrho_1 = \varrho_2$, d. h. der spiegelnde Körper hat die einfachste Rotationsgestalt, die einer Kugel, angenommen, und man erhält die von Reusch 1867 veröffentlichten Gleichungen:

$$\text{Id.}\quad \frac{-\varrho_1 \sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)}\cdot\frac{\cos e_2{}^2}{x_0} + \frac{\varrho_1 \sin e_2}{\sin(e_2 - e_1)}\cdot\frac{\cos^2 e_1}{x_1} = 1.$$

$$\text{IId.}\quad \frac{-\varrho_1 \sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)}\cdot\frac{1}{x_0} + \frac{\varrho_2 \sin e_2}{\sin(e_2 - e_1)}\cdot\frac{1}{x_2} = 1.$$

Bei unseren Untersuchungen beschränken wir uns auf den Fall eines rotationshyperbolischen Spiegels und auf die Annahme, dass die leuchtenden Objekte in der Einfallsebene liegen. Behalten wir bei unseren weiteren Betrachtungen die Voraussetzung bei, dass das Azimut $\varepsilon = 0$ bleibe, und berücksichtigen wir, dass die Spiegelfläche eine Rotationsfläche ist, so ist die Normale N des Einfallspunktes der Krümmungsradius des Nebennormalschnittes. Setzen wir deshalb N für ϱ_2 ein, und gehen wir nunmehr zu der Betrachtung über, dass das

Strahlenbündel gespiegelt wird, d. h. dass $e_1 = -e_2$ ist, so vereinfachen sich die Formeln Id und IId in:

$$\text{Ie.} \quad \frac{\varrho_1 \cdot \cos e_2}{2\,x_0} + \frac{\varrho_1 \cdot \cos e_1}{2\,x_1} = 1.$$

$$\text{IIe.} \quad \frac{N}{2\cos e_2} \cdot \frac{1}{x_0} + \frac{N}{2\cos e_2} \cdot \frac{1}{x_2} = 1.$$

Lösen wir diese beiden Gleichungen nach den beiden Unbekannten x_1 und x_2 auf so, erhalten wir

$$\text{Ie.} \quad \frac{\varrho_1 \cos e_2}{2\,x_0} + \frac{\varrho_1 \cos e_2}{2\,x_1} = 1$$

$$\frac{\varrho_1 \cos e_2}{2\,x_1} = 1 - \frac{\varrho_1 \cos e_2}{2\,x_0}$$

und hieraus

$$\text{If.} \quad x_1 = \frac{\varrho_1 \cdot \cos e_2 \cdot x_0}{2\,x_0 - \varrho \cdot \cos e_2}.$$

Analog erhalten wir für

$$\text{IIe.} \quad \frac{N}{2\cos e_2} \cdot \frac{1}{x_0} + \frac{N}{2\cos e_2} \cdot \frac{1}{x_2} = 1$$

$$\text{IIf.} \quad x_2 = \frac{N x_0}{2\cos e_2\, x_0 - N}.$$

Bei dem in der Aufgabe besonders erwähnten Teile der Arbeit, in welchem die Reflexion des Sternhimmels behandelt wird, haben wir, da das leuchtende Objekt unendlich weit entfernt ist, für die Grösse x_0 den Wert $-\infty$ einzusetzen. Hierdurch wird eine

weitere Reduktion der Formeln If und IIf veranlasst. Wiederholen wir die Voraussetzung, dass bei unserem Rotationshyperboloid à deux nappes der leuchtende Punkt in einem Axenschnitte liegt, dass also $\varepsilon = 0$ ist, so erhalten wir für die Gleichungen die vereinfachten Formen:

$$\text{Ig.} \quad x_1 = \frac{\varrho \cdot \cos e_2}{2}, \qquad \text{IIg.} \quad x_2 = \frac{N}{2 \cos e_2}.$$

Wie schon am Schluss der Einleitung erwähnt, tritt bei der Durchführung der gestellten Aufgabe unter Umständen aplanatische Reflexion auf, welche sich auf folgenden durch Matthiessen mathematisch bewiesenen Satz stützt: „Wenn bei einer beliebigen Rotationsfläche zweiter Ordnung der gespiegelte Strahl durch einen ihrer Fokus geht, dann ist die Spiegelung aplanatisch.“ (Vergl. Anmerkung [1] Seite 11.) Der Beweis dieses Theorems geht davon aus, dass Aplanatismus bei Spiegelung und Brechung dann eintritt, wenn $x_1 = x_2$ ist. Setzen wir im vorliegenden Falle die beiden oben gefundenen Werte von x_1 und x_2 einander gleich, so ist:

$$\frac{\varrho_1 \cdot \cos e_2 \cdot x_0}{2 x_0 - \varrho_1 \cdot \cos e_2} = \frac{N \cdot x_0}{2 \cos e_2 \, x_0 - N}.$$

Nach einigen Umformungen erhält man hieraus:

$$N = \varrho_1 \cos^2 e_2.$$

Man ersieht, dass diese Bedingungsgleichung bei der Spiegelung von der Grösse x_0 unabhängig ist. Es

lässt sich beweisen, dass die Gleichung $N = \varrho_1 \cos^2 e_2$ (Newton) allen Kurven zweiter Ordnung gemeinsam ist. Die allgemeine Polargleichung lautet in diesem Falle:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos\vartheta} \text{ oder } \frac{1}{r} = \frac{e}{p} \cos\vartheta + \frac{1}{p}.$$

Differentiiert man dieselbe nach $d\vartheta$, so wird:

$$\frac{dr}{d\vartheta} = \frac{r^2 e}{p} \cdot \sin\vartheta.$$

Logarithmiert man beide Seiten, so resultiert:

$$lg \frac{dr}{d\vartheta} = 2\, lg\, r + lg \frac{e}{p} + lg \sin\vartheta.$$

Bringen wir nun die Glieder auf eine Seite und differentiieren nochmals, so erhalten wir:

$$\frac{d^2 r}{d\vartheta^2} - \frac{2}{r}\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 - \cos\vartheta \frac{dr}{d\vartheta} = 0.$$

Die allgemeine Gleichung der Normalen ist:

$$N = \frac{r \cdot \sin\vartheta}{\sin(\vartheta - e_1)}.$$

Lösen wir die rechte Seite auf, so ergibt sich:

$$N = \frac{r \cdot \sin\vartheta}{\sin\vartheta \cdot \cos e_1 - \cos\vartheta \cdot \sin e_1}.$$

Ferner ist $tg\, e_1 = \frac{dr}{r \cdot d\vartheta}$;

setzen wir dieses ein, so erhalten wir durch Umformung:

$$\cos e_1 = \frac{r\,d\vartheta}{\sqrt{d\,r^2 + r^2\,d\,\vartheta^2}}$$

und

$$\sin e_1 = \frac{d\,r}{\sqrt{d\,r^2 + r^2\,d\,\vartheta^2}}$$

folglich

$$N = \frac{r\sqrt{d\,r^2 + r^2\,d\,\vartheta^2}}{r\,d\,\vartheta - \cot g\,\vartheta\,d\,r}.$$

Berücksichtigen wir die Differentialgleichung, so wird

$$\varrho_1 = \frac{(d\,r^2 + r^2\,d\,\vartheta^2)^{3/2}}{2\,d\,r^2\,d\,\vartheta - r\,d^2\,r\,d\vartheta + r^2\,d\,\vartheta^3}$$

$$= \frac{(d\,r^2 + r^2\,d\,\vartheta^2)^{3/2} : r\,d\,\vartheta^3}{\frac{2\,d\,r^2}{r\,d\,\vartheta^2} - \frac{d^2\,r}{d\,\vartheta^2} + r}$$

$$= \frac{(d\,r^2 + r^2\,d\,\vartheta^2)^{3/2}}{r\,d\,\vartheta^2\,(r\,d\,\vartheta - \cot\vartheta\,d\,r)} = \frac{N\,(d\,r^2 + r^2\,d\,\vartheta^2)}{r^2\,d\,\vartheta_2};$$

folglich ist

$$N = \varrho_1 \cos e_2{}^2.$$

Um die Lage der durch Berechnung gefundenen Bilder zu bestimmen, beziehen wir uns auf die auf Seite 15 angegebenen Voraussetzungen über die Vorzeichen der Richtung.

In Bezugnahme auf Figur 2 und 3 definieren wir noch den Begriff der Strahlenfächer (Matthiessen). Man kann sich das Strahlenbündel PMM_1N_1N in lauter Fächer eingeteilt denken, und zwar ein Mal parallel zur Einfallsebene (Meridionalebene), die Strahlen derselben gehen sämtlich durch die erste Brennlinie B_1 (Strahlenfächer I. Ordnung); ein zweites Mal senkrecht zur Einfallsebene (Sagittalschnitt), die Strahlen derselben gehen sämtlich durch die zweite Brennlinie B_2 (Strahlenfächer II. Ordnung).

§ 2. Mathematische Ableitung der Gleichungen der in Betracht kommenden Dimensionen der Spiegel.

Die Grössenabmessungen der bei nachfolgenden Untersuchungen angewendeten hyperbolischen Spiegel ergeben sich aus folgenden Betrachtungen.

Der konvexe bez. konkave Spiegel ist der Mantel eines Rotationskörpers, welcher durch eine um ihre Axe gedrehte Hyperbel gebildet ist. Die allgemeine Gleichung des hyperbolischen Meridians ist $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Der folgenden Untersuchung liegt die gleichseitige Hyperbel zu Grunde und für diesen Fall vereinfacht sich die Formel dadurch, dass $b = a$ wird, in $x^2 - y^2 = a^2$.

Zur weiteren Bestimmung der Dimensionen der Spiegel seien uns nachstehende numerische Annahmen gestattet:

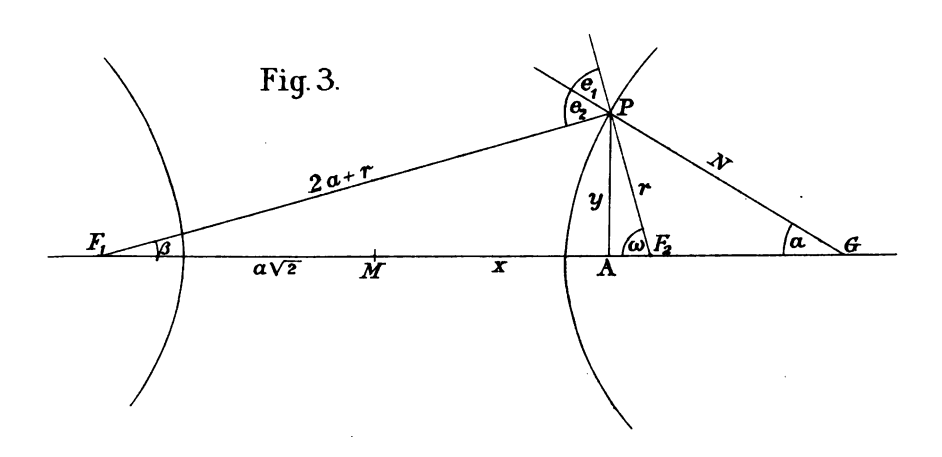
Es sei der Abstand des Scheitels der Hyperbel von ihrem Mittelpunkte $a = 50$ mm, und es nehme der

Polarwinkel ω, welcher seinen Scheitel in Fokus F_2 hat, und welcher durch die Hauptaxe und die Verbindungslinie eines Kurvenpunktes mit dem Fokus F_2 gebildet wird, von 5^0 zu 5^0 zu.

Die Entfernung der Brennpunkte F_1 und F_2 vom Hyperbelmittelpunkte M ist dann gleich $a\sqrt{2} = 70{,}711$ mm.

Die Gleichung für den Wert des Abstandes r eines Kurvenpunktes von dem ihm zunächst liegenden Brennpunkte ergiebt nachstehende Figur bei folgender Betrachtung: Aus dem Dreiecke F_1PF_2 ergibt sich

$$\overline{F_1P}^2 = \overline{F_1F_2}^2 - \overline{F_2P}^2 - 2\,\overline{F_1F_2} \cdot F_2P \cdot \cos\omega.$$



Durch Einsetzung der entsprechenden Werte, welche sich aus den Grundgleichungen der Hyperbel ergeben, erhält man nach einigen Umwandlungen

$$r = \frac{a}{1 + \sqrt{2}\cos\omega}.$$

Für y ergibt sich aus derselben Figur der Wert

$$y = r \cdot \sin \omega$$

und x berechnet sich aus

$$x = \sqrt{a^2 + y^2}.$$

Die allgemeine Gleichung der Normalen N einer Hyperbel ist:

$$N = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{-(a^2 - e^2 x^2)}.$$

Hieraus resultieren nach Einsetzung der Konstanten für die gleichseitige Hyperbel die Werte der Normalen

$$N = \sqrt{x^2 + y^2}$$

und Subnormalen

$$SN = x.$$

Für den Krümmungshalbmesser ϱ der entsprechenden Kurvenpunkte erhält man aus der allgemeinen Gleichung

$$\varrho = a^2 b^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)^{3/2}$$

und nach Einsetzung der unserem Spiegel entsprechenden Werte

$$\varrho = \frac{N^3}{a^2}.$$

Nach vorstehenden Relationen sind die in folgender Tabelle eingetragenen Werte berechnet.

Tabelle I.

$\sphericalangle\,\omega$	r	y	x	N	ϱ
0°	20,711	0,000	50,000	50,000	50,000
5°	20,757	1,8091	50,033	50,065	50,197
10°	20,897	3,6287	50,132	50,263	50,792
15°	21,133	5,4696	50,293	50,595	51,885
20°	21,468	7,3427	50,536	51,067	53,269
25°	21,913	9,2610	50,850	51,687	55,233
30°	22,474	11,236	51,247	52,465	57,763
35°	23,164	13,286	51,735	53,420	60,978
40°	23,999	15,426	52,326	54,552	64,938
45°	25,000	17,678	53,033	55,902	69,877
50°	26,191	20,064	53,875	57,490	76,004
55°	27,607	22,614	54,876	59,353	83,635
60°	29,291	25,367	56,067	61,538	93,217
65°	31,296	28,363	57,485	64,101	105,60
70°	33,700	31,667	59,184	67,124	120,97
75°	36,602	35,355	61,237	70,711	141,42
80°	40,142	39,532	63,740	75,004	168,78
85°	44,513	44,344	66,831	80,205	206,38
90°	50,000	50,000	70,711	86,603	259,81
95°	57,029	56,812	75,682	94,633	338,99
100°	66,276	65,269	82,220	104,98	463,81
105°	78,868	76,181	91,124	118,77	670,21
110°	96,841	91,001	103,83	138,07	1052,8
115°	124,28	112,63	123,23	166,95	1861,3
120°	170,65	147,79	156,02	214,90	3970,1
125°	264,78	216,89	222,58	311,78	12006,5
130°	549,69	421,09	424,5	597,61	85369,5
135°	∞	∞	∞	∞	∞

Zweiter Teil.

Berechnung der Bildkurven für spezielle Fälle.

§ 3. Das leuchtende Objekt sei eine Kugel.

1. Aufgabe. Gegeben sei als leuchtendes Objekt eine Kugel mit dem Radius $R = 300$ mm. Der Mittelpunkt dieser Kugel liege im Fokus F_2 des hyperbolischen Spiegels, dessen Grösse und Gestalt die Dimensionen der Tabelle I ergeben. Das Auge des Beobachters befinde sich im Brennpunkt F_1 des Spiegels. Hieraus ergibt sich, dass die konvexe Seite des hyperbolischen Rotationskörpers spiegelnd ist. Die Gleichungen der beiden Bildkurven x_1 und x_2 sind die auf Seite 18 angeführten Relationen If und IIf:

$$x_1 = \frac{\varrho_1 \cdot \cos e_2 \cdot x_0}{2\, x_0 - \varrho_1 \cdot \cos e^2}, \quad x_2 = \frac{N \cdot x_0}{2 \cos e_2 \cdot x_0 - N}.$$

Die Werte für ϱ_1 und N entnehmen wir der Tabelle I. Die Grösse x_0 berechnet sich aus $x_0 = R - r$. Die Bestimmung des Winkels e_2 leitet sich aus Figur 4 ab.

Im Dreieck F_1PC ist $\sphericalangle PCF_1 = \sphericalangle \alpha$; $\sphericalangle PF_1C = \sphericalangle \beta$; $PA = y$; $PC = N$; $MA = AC = x$; $MF_1 = MF_2 = a\sqrt{2}$. Da $\sphericalangle e_2 = \sphericalangle \alpha + \sphericalangle \beta$ ist, so wird $\cos e_2 = \cos(\alpha + \beta) =$ $= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$.

Hierfür ergibt bei Betrachtung der Figur

$$\cos a = \frac{x}{N}; \quad \cos \beta = \frac{x + a\sqrt{2}}{2a + r}$$

$$\sin a = \frac{y}{N}; \quad \sin \beta = \frac{y}{2a + r}.$$

Setzt man diese Werte ein, so ergibt sich

$$\cos e_2 = \frac{x^2 + a\,x\sqrt{2} - y^2}{N(2a + r)}.$$

Nach Berücksichtigung der Hyperbelgleichung $y^2 = x^2 - a^2$ folgt

$$\cos e_2 = \frac{a(a + x\sqrt{2})}{N(2a + r)}.$$

Es ist ferner

$$2a - r = \sqrt{y^2 + (x + a\sqrt{2})^2}.$$

Setzt man dieses ein, so ergibt sich nach einigen Umformungen

$$\cos e_2 = \frac{a}{N}.$$

Berücksichtigt man den auf Seite 24 für ϱ_1 angegebenen Wert $\frac{N^3}{a^2}$ und bildet unter Einsetzung dieser Zwischenwerte die Gleichungen, so resultiert für diese Aufgabe:

$$x_1 = \frac{x_0 \cdot N^2}{2\,x_0\,a\,N^2}, \qquad x_2 = \frac{x_0 \cdot N^2}{2\,x_0\,a\,N^2}.$$

Die beiden für x_1 und x_2 gefundenen Werte sind gleich, mithin haben wir es mit einer aplanatischen

oder homocentrischen Spiegelung zu tun, wie es auch der auf Seite 20/21 angeführte und bewiesene Satz ergibt.

Die Bestimmung der Lage der resultierenden Kurven bedingt die Feststellung der Vorzeichen der einzelnen Grösse in der oben angegebenen Weise. Da die konvexe Seite des Rotationskörpers spiegelnd ist, hat x_0 negatives Vorzeichen, ϱ_1 und N haben positives Zeichen. Die Werte derselben sind in Tabelle I aufgeführt. Der Einfallswinkel e_2 ist kleiner als 90°, mithin ist auch sein Kosinus positiv. Setzen wir die Vorzeichen in unsere Gleichung ein, so folgt:

$$x_1 = \frac{x_0 \cdot \varrho_1 \cdot \cos e^2}{2\,x_0 - \varrho_1 \cdot \cos e^2} = \frac{(-)\cdot(+)\cdot(+)}{(-)-(+)\cdot(+)} = +$$

Da der Strahleneinfallspunkt, wie schon erwähnt, als Anfangspunkt der Abscissen gilt, so liegt die Bildkurve auf der dem leuchtenden Objekt entgegengesetzten Seite.

Bei dem Winkel $\sphericalangle\, \omega = 126^\circ\, 6'\, 15''$ tritt ein Grenzfall ein, da hierfür $x_0 = 0$ wird, also die leuchtende Kugel den Spiegel berührt. Die Abscisse des Bildes wird für diesen Punkt gleich Null.

Der Wert für diesen $\sphericalangle\, \omega$ berechnet sich aus der Gleichung

$$r = \frac{a}{1 + \sqrt{2} \cos \omega}.$$

worin wir für $r = R - x_0 = 300$ mm einzusetzen haben.

Der Abstand η der Bildpunkte vom Augenpunkt ergibt sich bei Betrachtung der Tafel I

$$\eta = (2a + r) + x_1.$$

Die in diesen Rechnungen verwendeten Werte für ϱ_1 und N sind der Tabelle I entnommen; die für die Bildkurve berechneten Werte, welche zur Konstruktion des Bildes der Tafel I verwendet sind, enthält Tabelle II.

Tabelle II.

$\sphericalangle\, \omega$	x_0	$\sphericalangle\, e_2 \left(\cos e_2 = \frac{a}{N}\right)$			x_1 u. x_2	η
0°	− 279,288	0°	0′	0″	+ 22,946	143,657
5°	− 279,243	2°	55′	46″	+ 23,001	143,758
10°	− 279,103	5°	51′	38″	+ 23,166	144,063
15°	− 278,867	8°	47′	36″	+ 23,446	144,579
20°	− 278,481	11°	44′	00″	+ 23,845	145,313
25°	− 278,087	14°	40′	52″	+ 24,374	146,287
30°	− 277,526	17°	37′	55″	+ 25,042	147,516
35°	− 276,836	20°	36′	41″	+ 25,871	149,035
40°	− 276,001	23°	34′	21″	+ 26,863	150,862
45°	− 275,000	26°	33′	54″	+ 28,061	153,061
50°	− 273,809	29°	34′	22″	+ 29,491	155,682
55°	− 272,393	32°	36′	14″	+ 31,194	158,801
60°	− 270,709	35°	39′	32″	+ 33,222	162,513
65°	− 268,704	38°	44′	16″	+ 35,640	166,936
70°	− 266,300	41°	51′	0″	+ 38,536	172,236
75°	− 263,398	45°	0′	0″	+ 42,023	178,625
80°	− 259,858	48°	11′	37″	+ 46,245	186,387
85°	− 255,487	51°	26′	5″	+ 15,389	195,902
90°	− 250,000	54°	44′	8″	+ 57,692	207,692
95°	− 242,971	58°	6′	20″	+ 65,436	222,465
100°	− 233,724	61°	33′	26″	+ 74,891	241,167
105°	− 221,132	65°	6′	15″	+ 86,126	264,994
110°	− 203,159	68°	46′	3″	+ 98,347	295,188
115°	− 175,72	72°	34′	22″	+ 107,77	332,05
120°	− 129,35	76°	32′	46″	+ 101,05	371,70
125°	− 35,22	80°	44′	30″	+ 33,981	398,70
126° 6′ 15″	0,00	81°	41′	57″	+ 0,000	400,00

Für den $\sphericalangle\, \omega = 126°\, 6'\, 15''$ ist:

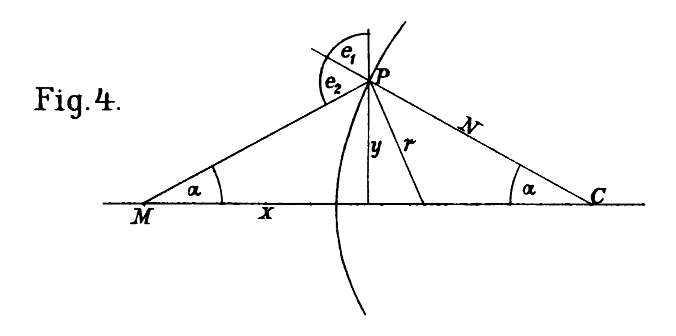
$r = 300$; $y = 242{,}33$; $x = 247{,}43$; $N = 346{,}33$.



2. Aufgabe. Es werde hierfür der Augenpunkt nach dem Hyperbelmittelpunkt M verlegt. Die Spiegelung finde mithin noch auf der konvexen Seite statt. Die Grösse und der Mittelpunkt der leuchtenden Kugel mögen, wie vorstehend, dieselben bleiben.

Die Betrachtung der Figur 4 ergibt die Gleichungen für die Werte von $\cos e_2$ und x_0.

Das Dreieck MPC ist ein gleichschenkliges, denn wie auf Seite 26 angegeben, ist $MA = AC = x$.



Es sind mithin $\sphericalangle PMC = PCM = \sphericalangle a$, also

$$\sphericalangle e_2 = 2\,a$$

oder

$$\cos e_2 = \cos 2\,a = \cos^2 a - \sin^2 a.$$

Da $\cos a = \frac{x}{N}$ und $\sin a = \frac{y}{N}$, so ist

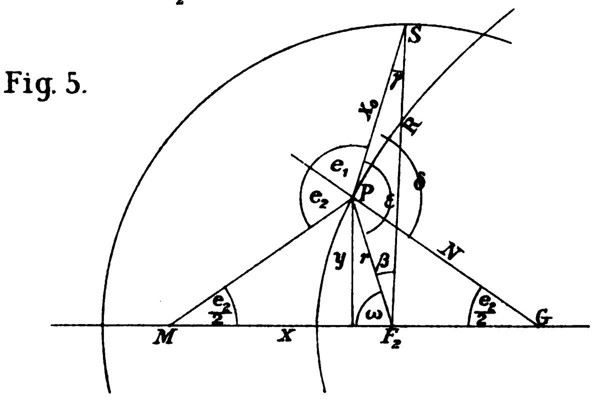
$$\cos e_2 = \frac{x^2 - y^2}{N^2}.$$

Für die gleichseitige Hyperbel ist

$$\cos e_2 = \frac{a^2}{N^2}.$$

Zur Bestimmung von x_0 betrachten wir in Figur 5 das Dreieck F_2PS.

Fig. 5.



$$\sphericalangle \delta = \sphericalangle \varepsilon + \sphericalangle \delta - \varepsilon$$

$$\sphericalangle \varepsilon = \pi - e_2 \text{ und } \sphericalangle \delta - \varepsilon = \omega - \frac{e^2}{2},$$

folglich

$$\sphericalangle \delta = \pi + \omega - \frac{3\, e_2}{2}.$$

Es ist ferner

$$\sin \delta = - \sin\left(\omega - \frac{3\, e_2}{2}\right).$$

Aus der folgenden Tabelle III ergibt sich aber, dass $\sphericalangle \frac{3\, e_2}{2}$ stets grösser als $\sphericalangle \omega$ ist, und wir können mithin schreiben

$$\sin \delta = \sin\left(\frac{3\, e_2}{2} - \omega\right).$$

Es verhält sich ferner

$$\sin \gamma : \sin\left(\frac{3\, e_2}{2} = \omega\right) = r : R$$

und hieraus

$$\sin\gamma = \frac{r \cdot \sin\left(\frac{3\,e_2}{2} - \omega\right)}{R}$$

wodurch auch der Winkel γ bestimmt ist. $\sphericalangle\beta$ ergibt sich aus der Figur

$$\beta = \pi - \sphericalangle(\gamma + \delta)$$

folglich

$$\sin\beta = \sin(\gamma + \delta).$$

Nach Bestimmung der Winkel resultiert die Proportion

$$\sin\beta : \sin\gamma = x_0 : r$$

oder

$$x_0 = \frac{r \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}.$$

Durch Einsetzung der oben entwickelten Werte erhalten die Gleichungen zur Bestimmung von x_1 und x_2 folgende Formen:

$$x_1 = \frac{x_0\,\varrho_1 \cos e_2}{2\,x_1 - \varrho_1 \cos e_2} = \frac{x_0 \cdot N}{2\,x_0 - N}$$

$$x_2 = \frac{N \cdot x_0}{2 \cos e_2 \cdot x_0 - N} = \frac{x_0 \cdot N^3}{2\,x_0\,a^2 - N^3}.$$

Die relative Lage der beiden Bildkurven ist dieselbe wie bei der zuerst behandelten Aufgabe.

Da der Kugelmittelpunkt im Fokus F_2 liegt, so tritt auch hier bei $\sphericalangle\omega = 126^0\ 6'\ 15''$ der Grenzfall ein, dass das leuchtende Objekt den Spiegel berührt, also $x_0 = 0$. Die Entfernungen η_1 und η_2 des Auges des Beobachters von den Bildkurven resultieren aus $\eta_1 = N + x_1$ und $\eta_2 = N + x_2$. Die Abscissen der Tafel II sind in nachfolgender Tabelle III aufgeführt.

Tabelle III.

$\sphericalangle \omega$	x_0	$\sphericalangle e_2 \left(\cos e_2 = \frac{a^2}{N^2}\right)$			x_1	x_2	η_1	η_2
0°	− 279,29	0°	0′	0″	+ 22,946	+ 22,946	72,946	72,946
5°	− 279,26	4°	8′	30″	+ 22,973	+ 23,029	73,038	73,094
10°	− 279,13	8°	16′	50″	+ 23,056	+ 23,278	73,319	73,541
15°	− 278,94	12°	24′	40″	+ 23,194	+ 23,702	73,789	74,297
20°	− 278,55	16°	34′	18″	+ 23,399	+ 24,317	74,466	75,384
25°	− 278,19	20°	38′	33″	+ 23,647	+ 25,123	75,334	76,810
30°	− 277,69	24°	44′	7″	+ 23,968	+ 26,161	76,433	78,626
35°	− 277,05	28°	49′	50″	+ 24,356	+ 27,467	77,776	80,887
40°	− 276,30	32°	51′	9″	+ 24,825	+ 29,055	79,377	83,607
45°	− 275,37	36°	52′	14″	+ 25,375	+ 31,005	81,277	86,907
50°	− 274,28	40°	51′	5″	+ 26,018	+ 33,378	83,508	90,868
55°	− 272,96	44°	47′	28″	+ 26,766	+ 35,437	86,119	94,790
60°	− 271,40	48°	41′	18″	+ 27,636	+ 39,869	89,174	101,407
65°	− 269,53	52°	31′	26″	+ 28,644	+ 44,065	92,745	158,166
70°	− 267,25	56°	17′	55″	+ 29,817	+ 49,323	96,931	116,447
75°	− 264,65	60°	40′	34″	+ 31,189	+ 55,801	101,900	126,512
80°	− 261,14	63°	36′	55″	+ 32,793	+ 63,778	107,797	138,782
85°	− 256,92	67°	7′	50″	+ 34,688	+ 73,620	114,893	153,825
90°	− 251,58	70°	31′	44″	+ 36,943	+ 85,669	123,546	171,272
95°	− 244,68	73°	47′	24″	+ 39,649	+ 100,13	134,282	104,763
100°	− 235,57	76°	53′	17″	+ 42,924	+ 116,73	147,904	221,71
105°	− 223,04	79°	47′	33″	+ 46,899	+ 133,91	165,669	252,68
110°	− 205,03	82°	27′	59″	+ 51,644	+ 147,56	189,714	285,63
115°	− 177,39	84°	51′	14″	+ 56,763	+ 148,99	223,713	315,94
120°	− 130,95	86°	53′	49″	+ 59,022	+ 122,85	273,922	337,75
125°	− 35,518	88°	31′	1″	+ 28,910	+ 35,390	339,69	346,17
126° 6′ 15″	− 0,000	88°	48′	20″	+ 0,000	+ 0,000	346,33	346,33

Für $\sphericalangle \omega = 126° 6' 15''$ ist:

$r = 300$; $y = 242,33$; $x = 247,43$; $N = 346,33$.

3. Aufgabe. Untersuchungen am Konkavspiegel.

Das leuchtende Objekt sei auch hier eine Kugel vom Radius $R = 300$ mm. Der Mittelpunkt der Kugel befinde sich im Fokus F_2, das Auge des Beobachters im Brennpunkt F_1. Die Spiegelung ist eine aplanatische, da die Anordnung des Augenpunktes und die Richtung der einfallenden Strahlen den Bedingungen des auf Seite 19 angeführten Satzes entsprechen. Die Grösse des Einfallswinkels bezüglich dessen Kosinusses ergibt die Ableitung in Aufgabe 1. $\cos e_2 = \frac{a}{N}$. Der Wert für x_0 resultiert aus $x_0 = R - (2a + r)$. Die der Berechnung zu Grunde gelegten Formeln sind die oben sub If und IIf angeführten Relationen:

$$x_1 = \frac{x_0 \varrho_1 \cos e_2}{2 x_0 - \varrho_1 \cos e_2} \text{ und } x_2 = \frac{N \cdot x_0}{2 \cos e_2 x_0 - N},$$

welche nach Einführung der hier geltenden Zwischenwerte für N, ϱ_1 und $\cos e_2$ sich vereinfachen. Da ausserdem Aplanatismus eintritt, so wird $x_1 = x_2$ und folglich

$$x_1 = x_2 = \frac{x_0 \cdot N^2}{2 a x_0 - N^2}.$$

Nach den Voraussetzungen über die Vorzeichen der Richtung ergibt sich bei konkaver Spiegelung für N und ϱ_1 negatives Zeichen. Bei dieser Aufgabe tritt ein bemerkenswerter Punkt auf. Stellen wir entsprechend der Bedingungsgleichung

$$x_1 = \frac{x_0 \cdot \varrho_1 \cdot \cos e_2}{2 x_0 - \varrho_1 \cdot \cos e_2}$$

die Vorzeichengleichung auf

$$\frac{(-)\cdot(-)\cdot(+)}{(-)-(-)\cdot(+)} = - \text{ bez.} +$$

so sehen wir, dass der Nenner dieses Schemas im Gegensatz zu dem der ersten beiden Aufgaben eine Differenz ist. Betrachten wir die Werte der in dieser Differenz vorkommenden Grössen, so ergibt sich, dass die Grösse x_0 mit wachsendem $\sphericalangle\, \omega$, wie es die folgende Tabelle zeigt, mehr und mehr abnimmt, bis sie bei $122^0\, 1'\, 40''$ Null erreicht. Andererseits wächst ϱ_1 mit zunehmendem $\sphericalangle\, \omega$.

Es tritt bei $\sphericalangle\, \omega = 102^0\, 57'$ der Fall ein, dass $2\, x_0 = \varrho_1 \cdot \cos e_2$ wird, wodurch der Nenner der Bestimmungsgleichung den Wert Null erhält. Dieses bedeutet, dass die Bildabscisse gleich ∞ wird. Wächst $\sphericalangle\, \omega$ weiter, so geht das aus der Vorzeichengleichung für die Lage der Bildkurve erhaltene negative Zeichen in das positive über. Das bisherige reelle Bild wandert also durch die Unendlichkeit und tritt als imaginäres wieder auf. Ausserdem sei darauf aufmerksam gemacht, dass das reelle Bild sich dem Beobachter nur verschwommen zeigt, da es sich erst hinter ihm bildet. Das imaginäre Bild jedoch ist von seinem Eintritt durch die Unendlichkeit ab sichtbar.

Tabelle IV enthält die zur Konstruktion der Bildkurve der Tafel III Figur 1 notwendigen Werte. Der Wert für η resultiert aus $\eta = x_1 - r$ bez. vom $\sphericalangle\, \omega = 102^0\, 57'$ ab $\eta = x_2 + r$.

Tabelle IV.

$\sphericalangle \omega$	x_0	$\sphericalangle e_2 \left(\cos e_2 = \frac{a}{N}\right)$			x_1 u. x_2	η
0°	− 179,288	0°	0′	0″	− 29,051	8,340
5°	− 179,243	2°	55′	46″	− 29,140	8,383
10°	− 179,103	5°	51′	38″	− 29,412	8,518
15°	− 178,867	8°	47′	36″	− 29,805	8,672
20°	− 178,481	11°	45′	35″	− 30,548	9,080
25°	− 178,087	14°	40′	42″	− 31,430	9,517
30°	− 177,526	17°	37′	55″	− 32,577	10,103
35°	− 176,836	20°	36′	41″	− 34,027	10,863
40°	− 176,001	23°	34′	21″	− 35,816	11,817
45°	− 175,000	26°	33′	54″	− 38,044	13,044
50°	− 173,809	29°	34′	22″	− 40,812	14,621
55°	− 172,393	32°	36′	14″	− 44,275	16,668
60°	− 170,709	35°	39′	32″	− 48,665	19,374
65°	− 168,704	38°	44′	16″	− 54,320	23,024
70°	− 166,300	41°	51′	0″	− 61,799	28,099
75°	− 163,398	45°	0′	0″	− 72,047	35,445
80°	− 159,858	48°	11′	37″	− 86,803	46,661
85°	− 155,487	51°	26′	5″	− 109,73	65,217
90°	− 150,000	54°	44′	8″	− 150,00	100,000
95°	− 142,971	58°	6′	20″	− 239,69	182,661
100°	− 133,724	61°	37′	40″	− 626,51	560,234
102° 57′	− 126,79	63°	38′	16″	∓ ∞	∞

Für $\sphericalangle \omega = 102° \, 57''$ ist:
$r = 73{,}199$; $y = 73{,}337$; $x = 87{,}115$; $N = 112{,}60$

$\sphericalangle \omega$	x_0	$\sphericalangle e_2$			x_1 u. x_2	η
105°	− 121,132	65°	6′	15″	+ 856,96	935,828
110°	− 103,159	68°	46′	3″	+ 224,84	321,681
115°	− 75,72	72°	34′	22″	+ 103,97	228,25
120°	− 29,35	76°	32′	46″	+ 31,342	201,992
122° 1′ 40″	0,00	78°	13′	18″	+ 0,000	200,000

Für letzteren Winkel ist:
$r = 200$; $y = 169{,}56$; $x = 176{,}78$; $N = 244{,}95$.

4. Aufgabe. Da nach dem Newton'schen Satze Aplanatismus nur dann eintritt, wenn das beobachtende Auge in dem einen Fokus sich befindet und die den Spiegel treffenden Lichtstrahlen nach dem anderen Brennpunkt desselben gerichtet sind, so ist uns durch Verlegung des Kugelmittelpunktes, d. h. des Ortes, nach welchem die Lichtstrahlen zusammenfliessen, nach dem Hyperbelmittelpunkte die Möglichkeit gegeben, auch bei Hohlspiegeln den auftretenden Astigmatismus zu zeigen. Der Augenpunkt ist aber durch diese Voraussetzung nicht mehr fixiert, sondern wechselt seine Lage. Es tritt mithin ein der Aufgabe 2 ähnlicher, jedoch auf Hohlspiegel angewendeter Fall auf, nur sind der Kugelmittelpunkt und die Lage des Augenpunktes mit einander vertauscht. Die Gleichungen zur Bestimmung der entstehenden Bildpunkte besitzen, da wir für $\cos e_2$ den auf Seite 31 abgeleiteten Wert einzusetzen haben, die schon gefundene Form

$$x_1 = \frac{x_0 \cdot N}{2\,x_0 - N} \qquad x_2 = \frac{x_0 \cdot N^3}{2\,x_0\,a_2 - N^3}.$$

Die Grösse x_0 ergibt sich aus $x_0 = R - N$, worin $R = 300$ mm ist. Die Lage der entstehenden Bilder ist gleich der in vorstehender Aufgabe bestimmten. Auch in diesem Falle bleibt das reelle Bild unsichtbar, wenn wir den Augenpunkt auf der Hauptaxe wandernd annehmen, während das imaginäre vom Beschauer immer gesehen werden kann. Bemerkenswert ist der Umstand, dass für die Kurve x_1 bei einem Werte des $\sphericalangle\, \omega = 118^0\, 43'\, 50''$ die Bildabscisse unendlich gross

wird, während die x_2-Kurve schon für $\sphericalangle\,\omega = 97^0\ 45'\ 39''$ die Unendlichkeit erreicht.

Die Berechnungen dieser beiden Winkel ergeben folgende Operationen: Die Werte für x_1 und x_2 werden unendlich gross, wenn die Nenner ihrer Bestimmungsgleichungen Null werden. Dieses tritt für x_1 ein, wenn $2\,x_0 = \varrho \cdot \cos e_2$ wird. Setzen wir für ϱ den oben angegebenen Wert $\frac{N^3}{a^2}$, für $x_0 = R - N$, worin $R = 300$ mm $= 6a$ ist, und für $\cos e_2$, wie schon erwähnt, $\frac{a^2}{N^2}$ ein, so erhalten wir:

$$2\,(6\,a - N) = \frac{N^3}{a^2} \cdot \frac{a^2}{N^2}$$

oder vereinfacht

$$4\,a = \sqrt{a^2 + 2\,y^2}.$$

Quadrieren wir unter Berücksichtigung, dass $y = r \cdot \sin\omega$ ist, so folgt

$$16\,a^2 = a^2 + 2\,r^2 \cdot \sin^2\omega.$$

Setzen wir für r den Wert $\frac{a}{1 + \sqrt{2}\cos\omega}$ ein, so resultiert

$$15\,a^2 = \frac{2\,a^2 \cdot \sin^2\omega}{(1 + \sqrt{2}\,\cos\omega)^2}.$$

Setzt man $\sin^2\omega = 1 - \cos^2\omega$, so ergeben einige Zwischenrechnungen

$$\cos\omega = \frac{\pm\sqrt{34} - 15\,\sqrt{2}}{32}$$

und hieraus, da der $\cos$ negativ ist, $\sphericalangle\,\omega = 118^0\ 43'\ 50''$.

Die Berechnung des Grenzwertes für die x_2-Kurve geht von der Gleichung;

$$2\, x_0 \cdot \cos e_2 = N$$

aus. Führen wir die zu Anfang vorstehender Ableitung angegebenen Werte ein, so erhält man

$$12\, a^3 - 2\, a^2 N - N^3 = 0.$$

Dividiert man durch $-a^3$, so erhält man die kubische Gleichung

$$\left(\frac{N}{a}\right)^3 + \frac{2\,N}{a} - 12 = 0.$$

Setzen wir hierin $\frac{N}{a} = z$, so erhalten wir

$$z = \sqrt[3]{+6 + \sqrt{\frac{2940}{81}}} + \sqrt[3]{+6 - \sqrt{\frac{2940}{81}}}$$

oder

$$z = 2 = \frac{N}{a}.$$

Entwickeln wir dieses weiter, so resultiert

$$\cos \omega = \frac{\pm \sqrt{10} - 3\sqrt{2}}{8}.$$

Da auch dieser Kosinus einen negativen Wert hat, so wird

$$\sphericalangle\, \omega = 97^{0}\; 45'\; 39''.$$

Die bei diesen quadratischen Gleichungen sich ergebenden zweiten Werte für $\cos \omega$ sind, wie die Resultate zeigen, nicht verwendbar.

η_1 und η_2 ist gleich x_1 bez. $x_2 - r$ oder von den Grenzpunkten ab $x_1 + r$ bez. $x_2 + r$.

Tabelle V enthält die berechneten und für die Zeichnung Tafel III Figur 2 benutzten Werte.

Tabelle V.

$\sphericalangle \omega$	x_0	$\sphericalangle e_2 \left(\cos e_2 = \frac{a^2}{N^2}\right)$			x_1	x_2	η_1	η_2
0°	− 250,000	0°	0′	0″	− 27,778	− 27,778	7,067	7,067
5°	− 249,935	4°	8′	30″	− 27,819	− 27,900	7,062	7,143
10°	− 249,737	8°	16′	50″	− 27,943	− 28,271	7,046	7,374
15°	− 249,405	12°	24′	40″	− 28,153	− 28,905	7,020	7,772
20°	− 248,928	16°	34′	18″	− 28,455	− 29,836	6,987	8,368
25°	− 248,313	20°	38′	33″	− 28,845	− 31,094	6,932	9,181
30°	− 247,535	24°	44′	7″	− 29,342	− 32,697	6,868	10,223
35°	− 246,580	28°	49′	50″	− 29,955	− 34,791	6,791	11,627
40°	− 245,448	32°	51′	9″	− 30,686	− 37,332	6,687	13,333
45°	− 244,098	36°	52′	14″	− 31,565	− 40,775	6,565	15,775
50°	− 242,510	40°	51′	5″	− 32,610	− 45,064	6,419	18,873
55°	− 240,647	44°	47′	28″	− 33,851	− 50,612	6,244	23,005
60°	− 238,462	48°	41′	18″	− 35,328	− 57,931	6,037	28,640
65°	− 235,899	52°	31′	26″	− 37,090	− 67,823	5,794	36,527
70°	− 232,876	56°	17′	55″	− 39,213	− 81,710	5,513	48,010
75°	− 229,289	60°	40′	34″	− 41,801	− 102,24	5,199	65,64
80°	− 224,996	63°	36′	55″	− 45,003	− 135,04	4,861	94,90
85°	− 219,795	67°	7′	50″	− 49,052	− 194,50	4,539	149,99
90°	− 213,397	70°	31′	44″	− 54,325	− 332,02	4,325	282,02
95°	− 205,367	73°	47′	24″	− 61,482	− 970,36	4,453	913,33
97° 45′ 39″					—	∞	—	∞
100°	− 195,02	76°	53′	17″	− 71,819	+ 1241,2	5,543	1307,48
105°	− 181,23	79°	47′	33″	− 88,330	+ 394,68	9,462	473,55
110°	− 161,93	82°	27′	59″	− 120,34	+ 262,71	23,50	359,55
115°	− 133,05	84°	51′	14″	− 224,03	+ 155,24	99,75	279,52
118° 43′ 50″					∞	—	∞	—
120°	− 85,10	86°	53′	49″	+ 409,13	+ 88,912	579,78	259,562
124° 36′ 35″	− 0,000	88°	35′	32″	+ 0,000	+ 0,000	259,32	259,32

§ 4. Das leuchtende Objekt sei der Sternhimmel.

1. Aufgabe. Betrachten wir den Sternhimmel in der konvexen spiegelnden Seite unseres Rotationskörpers vom Hyperbelmittelpunkt aus. Das leuchtende Objekt ist unendlich weit entfernt, wodurch wir für x_0 den absoluten Wert ∞ erhalten. Hierdurch ergeben die Bestimmungsgleichungen, die zum Schlusse der mathematischen Ableitung (siehe Seite 19) mitgeteilten Vereinfachungen

$$x^1 = \frac{\varrho \cos e_2}{2} \quad x_2 = \frac{N}{2 \cos e_2}.$$

Da das Auge des Beobachters sich im Hyperbelmittelpunkte befindet, so gilt für $\cos e_2$ der auf Seite 31 entwickelte Wert $\frac{a^2}{N^2}$, und wir erhalten für die vorliegende Aufgabe für x_1 und x_2 nach Einführung dieses Zwischenwertes die einfachen Relationen

$$x_1 = \frac{N}{2} \quad x_2 = \frac{\varrho}{2}.$$

Nach den die Vorzeichen betreffenden Annahmen haben bei Reflexion im konvexen Spiegel ϱ_1 und N positive Zeichen, wodurch hier eine positive Lage der Bildkurven resultiert. Die entstehenden Bilder sind mithin imaginär.

Durch Einführung von Polarkoordinaten sind wir in der Lage, die entstandenen Kurven analytisch zu untersuchen.

Es ist $x = s \cdot \cos \varphi$ und $y = s \cdot \sin \varphi$. Hierin ist $s = x_1$ bez. $x_2 + N$ und $\sphericalangle \varphi = \frac{\sphericalangle e_2}{2}$

Diese Untersuchungen ergeben, dass die x_1-Kurve eine gleichseitige Hyperbel ist, bei welcher der Hyperbelmittelpunkt mit dem Mittelpunkt des Hyperboloids zusammenfällt. Der Scheitelabstand a dieser Kurve ist $= 75$ mm. Die zur Bestimmung der Kurve x_2 in gleicher Weise angestellten Operationen zeigten, dass dieselbe kein Kugelschnitt ist.

Die Dimensionen für die auf Tafel IV dargestellten Bilder sind in folgender Tabelle eingetragen. Die in den Kolumnen η_1 und η_2 aufgeführten Werte ergeben sich aus

$$\eta_1 = N + x_1 \text{ und } \eta_2 = N + x_2.$$

Tabelle VI.

$\sphericalangle \omega$	$\sphericalangle e_2 \left(\cos e_2 = \frac{a^2}{N^2}\right)$			x_1	x_2	η_1	η_2
0°	0°	0′	0″	+ 25,000	+ 25,000	75,000	75,000
5°	4°	8′	30″	+ 25,033	+ 25,098	75,098	75,163
10°	8°	16′	50″	+ 25,131	+ 25,396	75,394	75,659
15°	12°	24′	40″	+ 25,297	+ 25,942	75,892	76,537
20°	16°	34′	18″	+ 25,536	+ 26,642	76,603	77,709
25°	20°	38′	33″	+ 25,843	+ 27,616	77,530	79,303
30°	24°	44′	7″	+ 26,233	+ 28,881	78,698	81,346
35°	28°	49′	50″	+ 26,710	+ 30,489	80,130	83,909
40°	32°	51′	9″	+ 27,276	+ 32,469	81,528	87,021
45°	36°	52′	14″	+ 27,951	+ 34,938	83,853	90,840
50°	40°	51′	5″	+ 28,745	+ 38,002	86,235	95,492
55°	44°	47′	28″	+ 29,676	+ 41,817	89,029	101,170
60°	48°	41′	18″	+ 30,769	+ 46,608	92,307	108,146
65°	52°	31′	26″	+ 32,050	+ 52,80	96,151	116,901
70°	56°	17′	55″	+ 33,562	+ 60,48	100,686	127,604
75°	60°	40′	34″	+ 35,355	+ 70,71	106,066	141,422
80°	63°	36′	55″	+ 37,502	+ 83,39	112,506	159,304
85°	67°	7′	50″	+ 40,102	+ 103,19	120,307	183,395
90°	70°	31′	44″	+ 43,301	+ 129,90	129,904	216,503
95°	73°	47′	24″	+ 47,316	+ 169,49	141,949	264,123
100°	76°	53′	17″	+ 52,49	+ 231,90	157,47	336,88
105°	79°	47′	33″	+ 59,38	+ 335,10	178,15	455,87
110°	82°	27′	59″	+ 69,03	+ 526,4	207,10	664,47
115°	84°	51′	14″	+ 83,47	+ 930,6	250,42	1097,55
120°	86°	53′	49″	+ 107,45	+1985,0	322,35	2199,90
125°	88°	31′	1″	+ 155,39	+6003,3	466,17	6314,08
130°	89°	35′	54″	+ 298,80	+4268,47	896,41	43282,31
135°	90°	0′	0″	+ ∞	+ ∞	∞	∞

2. Aufgabe. Verlegen wir für die weitere Betrachtung den Augenpunkt nach dem Fokus F_2, so reflektiert der konkave Spiegel das Bild der Himmelskugel. Wir berücksichtigen nur die nach dem Brennpunkte F_1 konvergierenden Lichtstrahlen. Hierdurch sind die Vorbedingungen für den Aplanatismus erfüllt, und wir erhalten mithin hier nur eine Bildkurve. Bei Aplanatismus wird, wie schon erwähnt, $x_1 = x_2$. Wir können deshalb durch Gleichsetzung der Bestimmungsgleichungen dieser Werte die Unbekannte $\cos e_2$ wie folgt berechnen:

$$\frac{\varrho_1 \cdot \cos e_2}{2} = \frac{N}{2 \cos e_2}$$

$$\varrho \cdot \cos^2 e = N \text{ folgl. } \cos e_2 = \frac{a}{N}.$$

$\cos e_2$ hat denselben Wert, wie der bei der ersten Aufgabe der endlichen Kugel bestimmte, und wir erhalten hierdurch aus den Gleichungen

$$x_1 = \frac{\varrho \cdot \cos e_2}{2} \qquad x_2 = \frac{N}{2 \cos e_2}$$

die Relation

$$x_1 = x_2 = \frac{N^2}{2a}.$$

Die Grössen N und ϱ_1 haben bei konkaver Spiegelung negatives Vorzeichen, was auch die negative Lage des Bildes bedingt; das Bild ist mithin ein reelles. Da das Bild, wie die Werte der folgenden Tabelle zeigen, erst hinter dem Augenpunkte entsteht, erscheint dem Beobachter die Bildkurve verschwommen.

Betrachten wir in gleicher Weise die Himmelskugel vom Brennpunkt F_1 aus, d. h. in dem Konvex-

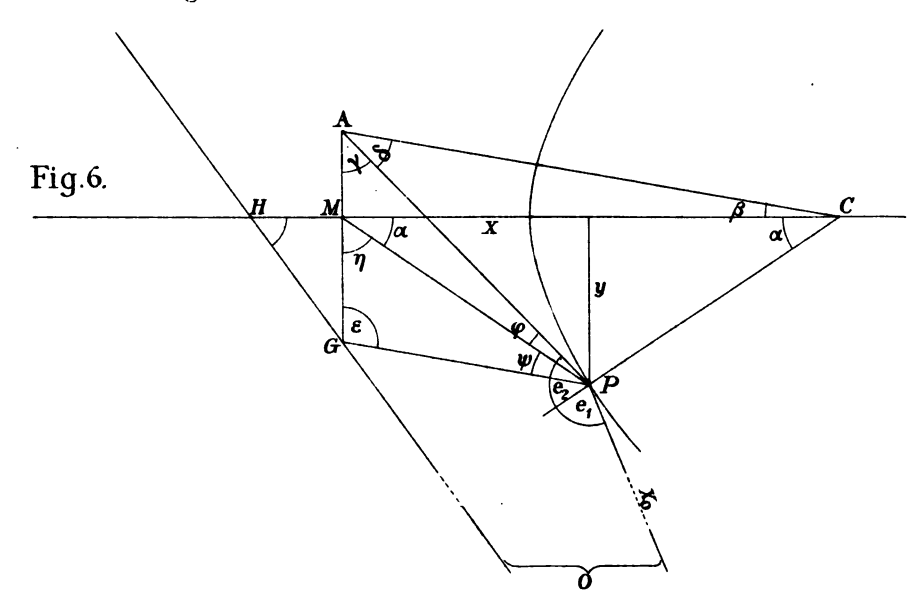
spiegel, so erhalten wir, da die Vorzeichen von N und ϱ positive sind, ein imaginäres Bild. Die Werte der Bildabscissen sind dieselben, wie bei der Spiegelung an der konkaven Seite. Einen Unterschied zeigen nur die Werte η_1. Für die Reflexion an der konkaven Seite ist $\eta = x_1 - r$, für die an der konvexen Seite $\eta = 2a + r + x_1$. Es gilt deshalb in folgender Tabelle das positive Vorzeichen von x_1 für die Spiegelung in der konvexen (Tafel V Fig. 1), das negative Zeichen für die Spiegelung in der konkaven Seite (Tafel V Fig. 2). Die Kolumnen für η sind entsprechend mit „konkav" bez. „konvex" bezeichnet. Der Konstruktion der auf Tafel V dargestellten Figuren sind die in Tabelle VII eingetragenen Werte zu Grunde gelegt.

Tabelle VII.

$\measuredangle\, \omega$	$\measuredangle\, e_2$			x_1 u. x_2	„konkav“ η	„konvex“ η
0°	0°	0′	0″	± 25,000	4,289	145,711
5°	2°	55′	46″	± 25,065	4,308	145,822
10°	5°	51′	38″	± 25,263	4,366	146,160
15°	8°	47′	36″	± 25,598	4,465	146,731
20°	11°	45′	35″	± 26,083	4,615	147,551
25°	14°	40′	42″	± 26,715	4,802	148,628
30°	17°	37′	55″	± 27,525	5,051	149,999
35°	20°	36′	41″	± 28,537	5,373	151,701
40°	23°	34′	21″	± 29,759	5,760	153,758
45°	26°	33′	54″	± 31,250	6,250	156,250
50°	29°	34′	22″	± 33,051	6,860	159,242
55°	32°	36′	14″	± 35,228	7,621	162,835
60°	35°	39′	32″	± 37,869	8,578	167,160
65°	38°	44′	16″	± 41,090	9,794	172,386
70°	41°	51′	0″	± 45,056	11,356	178,756
75°	45°	0′	0″	± 50,000	13,398	186,602
80°	48°	11′	37″	± 56,256	16,114	196,398
85°	51°	26′	5″	± 64,328	19,815	208,841
90°	54°	44′	8″	± 75,000	25,000	225,000
95°	58°	6′	20″	± 89,554	32,525	246,583
100°	61°	37′	40″	± 110,20	43,924	276,476
105°	65°	6′	15″	± 141,07	62,202	319,938
110°	68°	46′	3″	± 190,62	93,789	3874,61
115°	72°	34′	22″	± 278,72	154,44	503,000
120°	76°	32′	46″	± 461,84	291,19	732,49
125°	80°	44′	30″	± 965,84	701,06	1330,62
130°	85°	12′	2″	± 3332,9	2783,2	3982,6
135°	90°	0′	0″	± ∞	∞	∞

§ 5. Das leuchtende Objekt sei eine Gerade.

Wir nehmen an, die Gerade schneide die Hyperbelaxe und liege mit dem Augenpunkt und der Axe der Hyperbel in einer Ebene. Wir bestimmen nun in dem Hyperbelschnitte den Einfallspunkt P, von welchem aus das aus einem Punkte der graden Linie kommende Strahlenbündel nach A geworfen wird. Die Gerade sei gegen die Hyperbelaxe um den Winkel 55^0 geneigt und schneide dieselbe im Abstande $\frac{3a}{2} = 75$ mm vom Spiegel. Der Augenpunkt liege auf der Senkrechten im Mittelpunkte der Hyperbel in einem Abstande $\frac{a}{2} = 25$ mm. Die Koordinaten des Punktes P seien wiederum x und y, und PC sei seine Normale. — Zur Bestimmung der Grössen $\sphericalangle e_2$ und x_0 betrachten wir die Figur 6.



Gegeben ist

$$MH = \frac{a}{2},\ MC = 2x \text{ und } MP = N.$$

Es ist nun

$$tg\,MAC = \frac{4x}{a} \qquad \sphericalangle MAC = \gamma - \delta,$$

folglich

$$\sphericalangle \beta = \frac{\pi}{2} - (\gamma + \delta)$$

$$\sin a = \frac{y}{N}$$

und hieraus

$$\sphericalangle PMA = \frac{\pi}{2} + a$$

$$\sphericalangle \gamma + \sphericalangle \varphi = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \frac{\pi}{2} - a.$$

Nach einigen Zwischenrechnungen ergibt die Proportion

$$(N + d) : (N - d) = tg\,\frac{R - a}{2} : tg\,\frac{\gamma - \varphi}{2}$$

die Werte für $\sphericalangle \gamma$ und $\sphericalangle \varphi$.

Aus diesen Bestimmungen folgt

$$\sphericalangle \delta = \sphericalangle MAC - \gamma.$$

Wir haben nunmehr alle Werte, welche zur Berechnung des Einfallswinkels e_2 nötig sind, bestimmt, dem $\sphericalangle e_2 = \sphericalangle a + \beta + \delta$ als Aussenwinkel.

Den Wert für x_0 ergeben folgende Betrachtungen: Nach unserer Voraussetzung ist $\sphericalangle GHM = 55^0$, folglich $\sphericalangle MGO = 145^0$

$$f = \frac{a}{2} \cdot tg\,55^0 = 35{,}704 \text{ mm}$$

$$\sphericalangle \eta = \frac{\pi}{2} - a.$$

Nach dem Tangentensatze ist

$$(N+f):(N-f) = tg\left(\frac{\varepsilon+\psi}{2}\right) : tg\left(\frac{\varepsilon-\psi}{2}\right)$$

$$\sphericalangle(\varepsilon+\psi) = \sphericalangle \pi - \eta.$$

Hieraus ergeben sich die Winkel $\sphericalangle \varepsilon$ und ψ.

Ferner bestimmt die Proportion:

$$c : N = \sin \eta : \sin \varepsilon$$

die Werte für c

$$\sphericalangle PGO = 145^{0} - \sphericalangle \varepsilon$$

und

$$\sphericalangle GPO = 2 e_2 - (\sphericalangle \varphi + \sphericalangle \psi).$$

Nunmehr lässt sich x_0 bestimmen und zwar

$$x_0 : c = \sin PGO : \sin POG.$$

Es sind jetzt alle in den Formeln

$$x_1 = \frac{\varrho_1 \cdot \cos e_2 \cdot x_0}{2 x_0 - \varrho_1 \cos e_2} \qquad x_2 - \frac{N x_0}{2 \cos e_2\, x_0 - N}$$

vorkommenden Grössen bekannt, und wir können nun x_1 und x_2 berechnen.

Das Vorzeichenschema ergibt, dass die Bilder positives Zeichen haben, also scheinbare sind. Bei $\sphericalangle \omega = 19^{0}\, 28'\, 15''$ schneiden sich die x_1- und x_2-Kurven; in diesem Punkte ist die Spiegelung also eine aplanatische.

In dieser Aufgabe tritt zwei Mal der Fall auf, dass $x_0 = \infty$ wird. Bezeichnen wir entsprechend der Zeichnung die Teile, welche über bezüglich unter der Hauptaxe liegen, mit oben resp. unten, so wird x_0 oben bei dem Winkel $\sphericalangle \omega = 64^{0}\, 21'\, 45'' = \infty$ und unten bei $\sphericalangle \omega = 100^{0}\, 18'\, 30''$.

Die zur Konstruktion des Bildes der Tafel VI angewendeten Werte sind folgender Tabelle VIII entnommen.

Tabelle VIII.

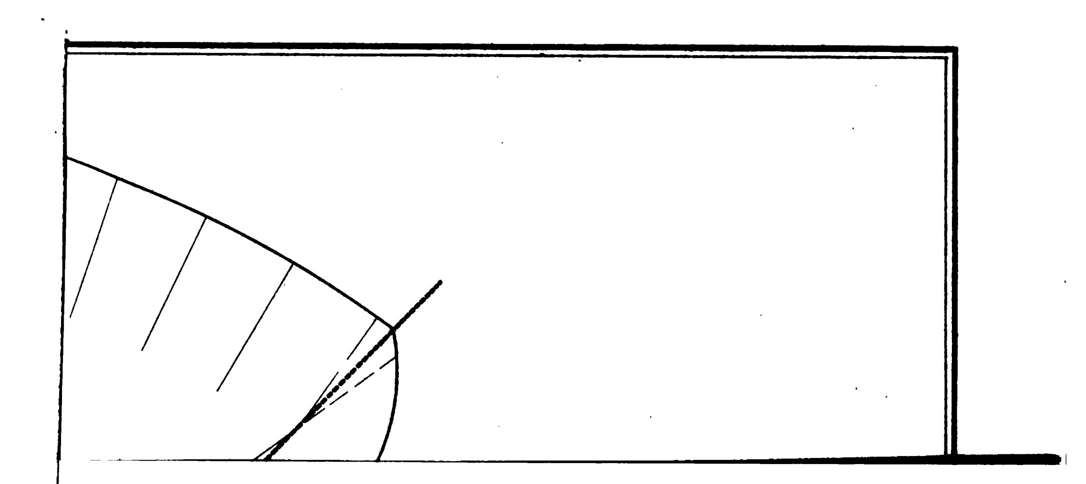
∢ ω	x_0	∢ e^2			x_1	x_2	η_1	η_2
64° 21′ 45″	— ∞	28°	58′	49″	+ 45,328	+ 36,437	102,919	94,028
60°	— 782,61	24°	43′	7″	+ 49,274	+ 35,504	105,341	91,472
50°	— 229,34	15°	11′	24″	+ 45,236	+ 34,231	99,338	88,333
40°	— 134,30	(+) 6°	3′	30″	+ 42,746	+ 34,470	95,941	87,665
30°	— 96,943	(—) 2°	39′	53″	+ 41,118	+ 36,017	94,181	89,080
20°	— 78,227	10°	57′	18″	+ 39,934	+ 38,967	93,464	92,497
19° 28′ 15″	— 77,451	11°	26′	14″	+ 39,551	+ 39,551	93,512	93,512
10°	— 67,792	18°	56′	56″	+ 39,332	+ 43,703	93,829	98,200
0°	— 62,108	26°	33′	54″	+ 34,940	+ 50,825	90,842	106,727
10°	— 59,545	33°	52′	10″	+ 32,649	+ 61,558	90,379	119,288
20°	— 59,474	40°	55′	2″	+ 30,436	+ 78,261	90,447	138,272
30°	— 61,803	47°	37′	53″	+ 28,410	+ 105,16	91,174	167,924
40°	— 66,970	54°	6′	56″	+ 26,587	+ 152,49	92,710	218,613
50°	— 76,118	60°	20′	10″	+ 24,980	+ 245,11	95,217	315,347
60°	— 91 839	66°	16′	43″	+ 23,560	+ 457,47	98,928	532,838
70°	— 120,43	71°	54′	17″	+ 22,260	+ 1051,3	104,199	1133,239
80°	— 181,17	77°	9′	58″	+ 20,908	+ 2479,6	111,620	2570,312
90°	— 381,44	82°	5′	14″	+ 18,763	+ 1793,7	122,103	1897,04
100°	— 6798,2	86°	7′	56″	+ 15,643	+ 878,71	137,783	1000,85
100° 18′ 30″	— ∞	86°	23′	30″	+ 14,999	+ 838,41	138,446	961,86

Die zu dieser Arbeit gehörigen nachstehend beigefügten Tafeln zeigen die leuchtenden Objekte B in roter Farbe. Der Spiegel ist schwarz ausgezogen. Die Hülfslinien des Spiegels — Asymtoten und Mittellinien — sind blau eingetragen. Der mit A bezeichnete Punkt ist der jeweilige Augenpunkt des Beobachters. Von diesem aus sind in Rot die von dem leuchtenden Objekt durch den Spiegel nach dem Auge des Beobachters reflektierten Strahlen gezogen. Die entstehenden Bildkurven B_1 bez. B_2 tragen die Farben rot und grün, und zwar ist die Kurve für x_1 in Rot, die x_2-Kurve in Grün ausgeführt.



Die Anregung zu vorstehender Arbeit erhielt ich von dem Direktor des Physikalischen Instituts der Universität zu Rostock, Herrn Prof. Dr. L. Matthiessen.

Hierfür, sowie für das rege Interesse und die wertvollen Unterstützungen, welche mir bei der Ausführung meiner Arbeit zu Teil wurden, drängt es mich, Herrn Prof. Dr. Matthiessen auch an dieser Stelle meinen aufrichtigen Dank auszusprechen.



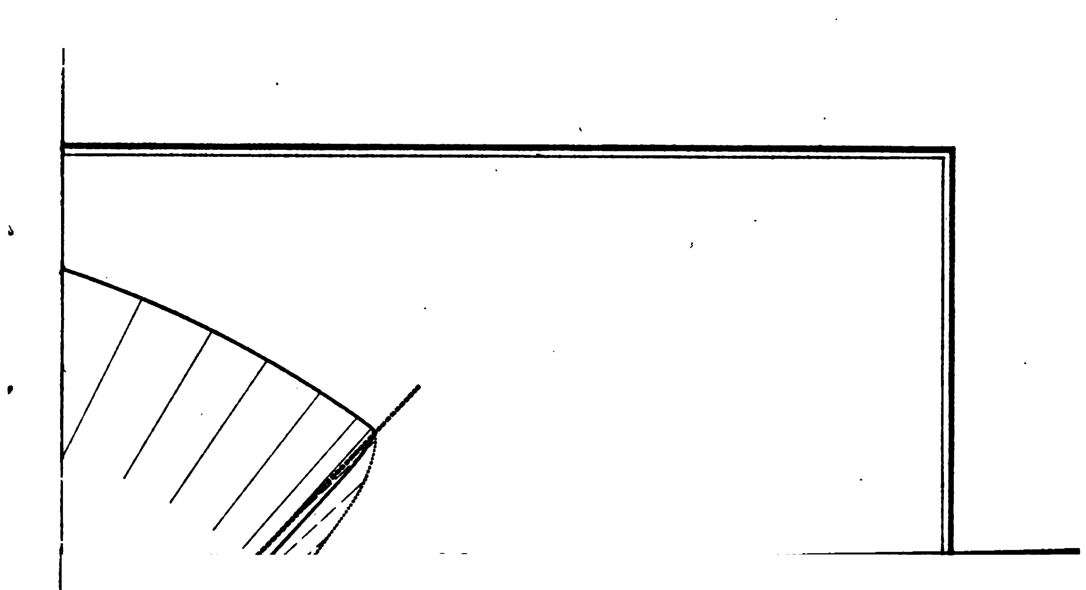


Fig. 1


LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF
CALIFORNIA

